

La leçon mathématique de Théodore (*Théétète*, 147c7-d6) I

Mais que dessine donc Théodore ?

I. Introduction

Les deux exposés portent sur la première partie de ce qu'on nomme le 'passage mathématique du *Théétète*' (147c7-d6), où Théétète raconte brièvement la leçon de mathématique donnée par le géomètre Théodore. Le premier porte sur les dessins tracés par Théodore, le second sur ses méthodes de démonstration d'incommensurabilité.

Ces exposés sont basés sur un travail en commun avec Luc Brisson, commencé il y a de nombreuses années. Nous l'avons repris il y a quelques mois pour un livre en cours de rédaction sur ce passage. Celui-ci a été commenté dès l'Antiquité et a donné lieu à un très grand nombre de commentaires des philosophes, des historiens et même des mathématiciens. Les chercheurs modernes ne sont d'accord à peu près sur rien, si ce n'est que son sujet est l'incommensurabilité de certaines grandeurs géométriques.

La meilleure interprétation de ce passage est probablement celle de Wilbur Knorr dans son ouvrage *The Evolution of Euclidean Elements* (ou *EEE*). Mais elle pose de nombreuses difficultés. Ce qui est important est que Knorr ne se contente pas comme la plupart des interprètes de montrer en détails sa reconstruction, mais il donne six critères que doit vérifier toute interprétation pour être crédible (cf. Annexe II). Comme il le remarque lui-même, cela ouvre la voie à un nombre indéfini d'autres méthodes qui seraient alors aussi voire plus crédibles que la sienne. Heureusement ajoute-t-il, et à raison, 'nous verrons qu'en fait, aucune reconstruction (avant celle présentée ici [dans *EEE*]) ne les vérifie.' (*EEE*, p. 96-7)

Nous sommes d'accord avec tout ce qui est dit ici. Mais alors, pourquoi présenter une nouvelle interprétation ?

C'est que, si selon nous ces six conditions sont nécessaires, il faut en ajouter trois autres essentielles, dont aucune n'est vérifiée par les différentes reconstructions, celle de Knorr y compris :

- 1) On ne doit pas postuler *a priori* que Platon veut célébrer ici Théétète, futur grand mathématicien, et qu'il lui rend hommage ici.
- 2) Le passage doit être lu comme partie du *Théétète* et non pas comme une partie autonome.
- 3) Sa description par Platon est réaliste au sens où elle doit suivre de près les leçons réelles des mathématiciens sur le sujet, que cette leçon soit mise en scène par Platon ou ait eu vraiment lieu.

Celle que nous allons donner vérifie alors non seulement les six contraintes posées par Knorr, mais les trois autres ci-dessus.

II. Le texte

Nous faisons quelques changements par rapport à celui communément utilisé. Alors que les interprétations débutent généralement en 147d3, nous commençons 3 lignes plus haut comme vous l'avez vu dans le titre. D'autre part, nous apportons deux modifications à l'édition classique de Burnet dont une ponctuation : comme vous le savez, les textes de l'époque de Platon ne comportaient ni ponctuation, ni minuscules, ni accents.

Θεέτη Et en fait, il se pourrait que tu demandes la sorte de chose qui nous est venue à l'esprit, à moi et à ce Socrate-là ton homonyme, alors que nous discussions entre nous tout à l'heure. Σωκράτης Quoi donc, Θεέτη ? Θεέτη Quelque chose à propos des puissances. Théodore ici présent nous avait trace des figures, mettant en évidence que la puissance de 3 pieds aussi bien que celle de 5 pieds ne sont pas commensurables en longueur avec celle de 1 pied ; il a continué ainsi, prenant chacune à tour de rôle, jusqu'à celle de 17 pieds. Il s'est arrêté là pour quelque raison.	Θεάτης (147c7) ἀτὰρ κινδυνεύεις ἐρωτᾶν οἷον καὶ αὐτοῖς ἡμῖν ἑναγχοῦς εἰσῆλθε διαλεγόμενοις, ἐμοὶ τε καὶ τῷ σὺ ὁμωνύμῳ τούτῳ Σωκράτει. Σωκράτης τὸ ποῖον δὴ, ὦ Θεάτης; Θεάτης (147d2) περὶ δυνάμεων τι. ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος περὶ καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἐκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαίδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο.
--	--

Modifications par rapport à l'édition de Burnet :

- Un point après le 'τι' de la première ligne dans la deuxième intervention de Θεέτη.
- L'acceptation de 'ἀποφαίνων' qui est mis entre parenthèses par Burnet.

Explication : Socrate vient juste de reprocher à Θεέτη de ne pas comprendre ce qu'est une définition, car pour définir la 'science', il a donné une liste de 'τέχναι' (146d1). Socrate lui donne alors l'exemple de la définition de la glaise ('πηλός') mélange d'eau et de terre. Sur quoi, Θεέτη déclare que maintenant c'est facile ('ῥᾴδιον'), et dévie sur une discussion qu'il a eue avec un camarade homonyme du philosophe. Socrate lui demande l'objet de cette discussion, et Θεέτη lui répond qu'il s'agit de 'quelque chose' à propos des 'δυνάμεις'. Il explique alors que Théodore leur avait dessiné des figures dans une leçon concernant des incommensurables.

Dans les lectures usuelles, on comprend que le jeune garçon affirme directement que 'Théodore a dessiné quelque chose' à leur propos, ce qui n'est pas une réponse à la question et n'ajoute rien au reste du texte. En fait, cela n'a guère de sens de dire que l'on dessine 'à propos' de quelque chose. On dessine non pas 'à propos' des triangles, des cercles ou des carrés, mais des cercles, des triangles ou des carrés. Si l'on veut donner un sens à la phrase dans le cadre de l'interprétation usuelle, on ne peut pas comprendre 'ἔγραφε' comme signifiant simplement 'dessiner', mais plutôt par 'prouver par des dessins (ou des diagrammes)'.

Au contraire, selon notre interprétation, il est deux temps. D'une part, Théodore *dessine* les 'puissances', puis dans un second temps, il prouve qu'elles sont incommensurables 'en longueur' à l'unité. Cela explique sans doute pourquoi Burnet décide de supprimer 'ἀποφαίνων' qui fait effectivement double emploi dans l'interprétation usuelles, dont la sienne.

Mais alors qu'a dessiné Théodore ?

III. Les dessins de Théodore

L'interprétation de 'δυνάμεις' a été l'objet d'innombrables discussions pour savoir s'il s'agit de carrés ou des côtés du carré. Je n'aborderai pas cette question difficile qui ne joue pas de rôle important ici. Commençons tout d'abord par un rappel sur la définition de grandeurs incommensurables qui jouent un rôle essentiel dans le passage mathématique.

Commensurabilité/incommensurabilité : deux grandeurs géométriques, par exemple deux longueurs A et B , sont dites commensurables entre elles s'il existe une 'commune mesure', c'est-à-dire une unité U telle que à la fois A et B soient des multiples entiers de U . En écriture moderne : $A = aU$ et $B = bU$ où a et b sont des entiers. Si une telle mesure U n'existe pas, les grandeurs A et B sont incommensurables.

Le lien avec la rationalité et l'irrationalité est donné en remarquant que A et B sont commensurables si et seulement si leur rapport $A/B = a/b$ est égal au rapport de 2 entiers a et b , c'est-à-dire si et seulement si leur rapport A/B est rationnel. Inversement, A et B sont incommensurables si et seulement si leur rapport A/B est irrationnel.

Exemples : Tout d'abord, deux grandeurs entières sont toujours commensurables, puisque toutes deux sont des multiples entiers de l'unité. Ainsi les longueurs de 3 pieds et 5 pieds sont commensurables. Et leur rapport $3/5$ est rationnel. Mais il n'est pas nécessaire que les grandeurs soient entières pour être commensurables entre elles.

Ainsi soient A et B des longueurs respectivement de 3 pieds et $5/2$ pieds. Elles sont commensurables car en prenant pour unité $U = 1/2$ pied, on a : $A = 6U$ et $B = 5U$. Et le rapport $A/B = 6/5$ est bien rationnel.

Par contre, d'après le théorème de Pythagore, la longueur de la diagonale D du carré de côté 2 pieds est (en écriture moderne) égale à $2\sqrt{2}$ pieds. En effet :

$$D^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \text{ pieds, d'où } D = 2\sqrt{2} \text{ pieds.}$$

Pour les géomètres grecs, cela revient à dire que le carré construit sur la diagonale du carré de 2 pieds est le double de ce carré, c'est ce que montre Socrate au jeune esclave dans le *Ménon*.

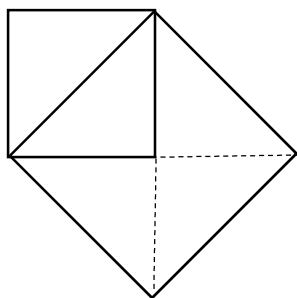


Figure 1

Le rapport de la diagonale au côté du carré est donc : $2\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$. Leur rapport est irrationnel, elle est donc incommensurable au côté du carré.

Le problème du pied ('πούς') comme unité

Le 'pied' ('πούς') dont il est question ici est d'abord une unité usuelle de longueur en Grèce ancienne. Mais elle est aussi utilisée ici par Théétète comme unité de surface, comme le fait Socrate dans le *Ménon* lorsqu'il montre le doublement du carré au jeune esclave. En termes modernes, on parlerait d'un pied-carré. Les surfaces étant des nombres entiers de pieds, elles sont toujours commensurables avec celle de 1 pied. Théétète explique à Socrate que Théodore leur a dessiné des grandeurs qui sont incommensurables avec celle de longueur 1 pied. Il s'agit donc des côtés de carrés de surfaces entières et le pied auquel sont comparés ces côtés est cette fois la longueur de 1 pied.

La suite de Théodore

Théodore dessine donc tout d'abord les côtés des carrés de 3 pieds, puis de 5 pieds, et il continue ainsi jusqu'à celui de 17 pieds. Il y a de nombreuses discussions sur leur construction, une question très

débatue est de savoir si le carré de 17 pieds est compris ou pas dans la suite étudiée par Théodore. Je considérerai cette question dans le deuxième exposé.

Quoiqu'il en soit Théétète dit seulement que cette suite est la suivante : 3, 5, ..., 17 (compris ou pas), sans préciser plus. La thèse quasi-universellement acceptée est qu'il s'agit de la suite des entiers compris entre 3 et 17 (17 compris ou pas) excepté les carrés parfaits, soit :

Suite standard de Théodore : 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, (17).

L'absence de 2 est alors justifiée par la référence à l'incommensurabilité de la diagonale par rapport au côté du carré. En effet, comme Socrate le montre dans le *Ménon*, la surface du carré de côté la diagonale d'un carré donné est le double du carré original. Partant du carré de 1 pied, la diagonale construite sur ce carré correspond alors au cas du carré de 2 pieds, et son absence s'explique par l'ancienneté de la connaissance de leur incommensurabilité. Cela est certainement juste. Toutefois, la preuve de cette incommensurabilité n'est jamais prise en compte dans les interprétations usuelles, alors que nous allons voir qu'elle a un rôle essentiel pour rendre compte des grandeurs considérées par Théodore, et ensuite dans les démonstrations qui sont l'objet du second exposé.

L'incommensurabilité de la diagonale (par rapport au côté du carré) : Pour justifier ce que dit Aristote dans *Seconds Analytiques* concernant la démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale dont le contraire impliquerait que 'tous les impairs deviendraient pairs', une preuve simple est donnée en comptant le nombre maximum de fois qu'un entier peut être divisé par 2, c'est une généralisation du cas des pairs, au moins 1 fois divisible par 2, et impairs qui ne sont pas divisibles par 2. Je ne vais pas entrer dans le détail ce qui serait trop long, je renvoie à mon article de 2010 donné en bibliographe. Ce qui nous importe ici est qu'un corollaire quasi-immédiat de la démonstration montre que la démonstration d'incommensurabilité du côté d'un carré de surface entière par rapport à l'unité se ramène toujours au seul cas des surfaces impaires.

Plus précisément,

- Si un entier est divisible par 2 au plus un nombre impair de fois, alors le côté du carré de surface ce nombre est incommensurable à l'unité.
- Si au contraire, il est divisible par 2 un nombre pair de fois, alors il est commensurable à l'unité ou pas selon que le nombre obtenu après toutes les divisions par 2 est commensurable ou ne l'est pas. Et comme ce nombre est impair, on est ramené au cas des impairs.

Exemples : 2 et 6 sont divisibles 1 fois par 2, le côté des carrés de 2 et 6 pieds sont donc incommensurables à l'unité ; 8 est divisible 3 fois par 2 et donc là encore le côté du carré de surface 8 pieds est incommensurable à l'unité.

12 est divisible 2 fois par 2 ($12 = 4 \times 3$), donc le côté du carré de 12 pieds est commensurable à l'unité si et seulement si celui du carré de surface 3 pied l'est. En termes modernes, $\sqrt{12}$ est rationnel si $\sqrt{3}$ l'est. Cela n'a rien de surprenant puisque $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$!

En appliquant ce résultat à tous les entiers compris entre 2 et 17 (inclus ou pas), on peut éliminer tous les pairs. La suite étudiée par Théodore est donc formée des entiers impairs compris entre 3 et 17 (inclus ou pas) :

Suite de Théodore : 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, (17)

Elle est plus courte (7 ou 8 termes) que la suite standard (contre 11 ou 12 termes) et va jouer un rôle important pour les preuves d'incommensurabilité que l'on considérera dans le second exposé.

IV. La méthode de Théodore

i) Quelques méthodes antérieures

La méthode utilisée par Théodore pour construire la suite de ces dessins a été également beaucoup discutée. Certains pensent qu'elle n'importe pas puisque Platon ne la présente pas, d'autres considèrent la méthode dite par '*anthypérèse*' qu'on peut exclure si l'on suit les contraintes données par Knorr, vu sa difficulté et sa longueur, pour une critique détaillée je vous renvoie à *EEE*, p. 118-126 (voir aussi son analyse sur la question des processus infinis pour les mathématiciens grecs, p. 36). Une autre est la construction directe par spirale assez populaire encore actuellement pour sa simplicité mathématique.

Je cite Szabó (*The Beginnings of Greek Mathematics*, p. 55-56) :

‘Les commentateurs précédents ont invariablement demandé comment Théodore avait construit ces carrés ; (...) certains ont dit que cela n’avait pas d’importance, (...) ou alors ont adopté la tentative intéressante de reconstruction de la méthode donnée par Anderhub’ :

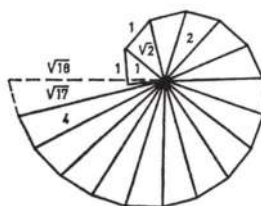


Figure 2

Szabó donne alors plusieurs raisons pour lesquelles cette construction n’est pas crédible. Nous pensons de même, mais d’abord pour une question textuelle : la construction ci-dessus nécessite l’étude de *tous* les carrés de surface compris entre 1 et 17 pieds, ce qui contredit directement Théétète, selon lequel Théodore commence avec celui de 3 pieds et saute celui de 4 pieds. Et il y a bien d’autres difficultés techniques pour la mise en œuvre concrète de cette méthode.

ii) Notre reconstruction

La méthode qui suit est basée sur un corollaire immédiat du théorème de Pythagore obtenu simplement en itérant trois fois ce théorème (cf. Annexe I) :

Corollaire du théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle ABC, de hauteur BH, alors le carré de côté BH est égal au rectangle de côtés AH et HC (en écriture moderne $BH^2 = AH \times HC$) :

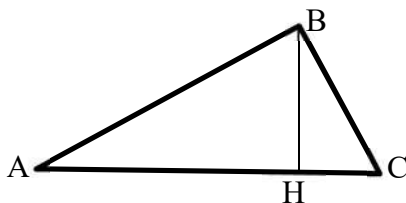


Figure 3

Elle utilise également un très ancien résultat attribué à Thalès : l’angle interceptant un diamètre est un angle droit (*Éléments* d’Euclide, proposition III.31). Dans la figure ci-dessous, tous les angles ADC, AEC et AFC sont droits.

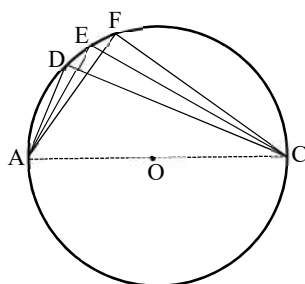


Figure 4

V. Les dessins de Théodore

Tout d'abord Theodore trace une droite notée PZ en marquant des repères chaque pied, donc les points P, Q, A, B, C, D, etc. où $PQ = QA = AB = \dots = 1$ pied sur une longueur de 9 pieds. Puis il trace la droite perpendiculaire à PZ passant par Q, soit QT.

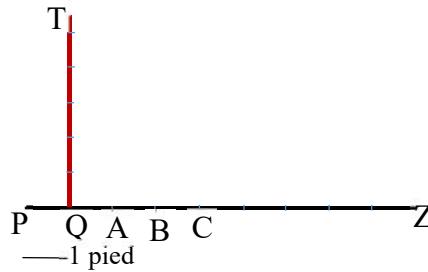


Figure 5

Puis viennent les différents dessins.

Premier dessin (cas de 3 pieds)

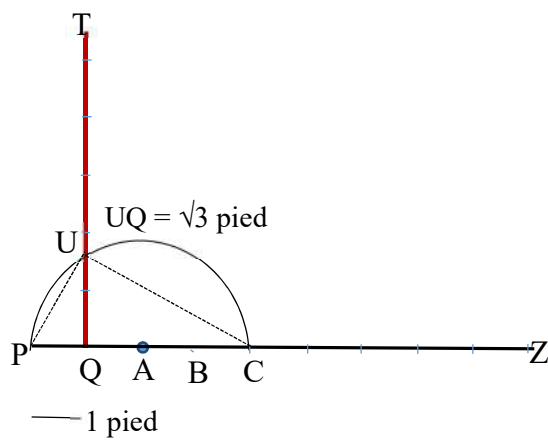


Figure 6

On considère d'abord le demi-cercle de centre A passant par P, donc de diamètre $PC = 4$ pieds. Puisque l'angle PUC est droit car intersectant un diamètre, d'après le corollaire du théorème de Pythagore, on a : $UQ^2 = PQ \times QC$. Mais $PQ = 1$ pied et $QC = 3$ pieds, donc en notations modernes $UQ = \sqrt{3}$ pieds (environ 0,53m).

Deuxième dessin (cas de 5 pieds)

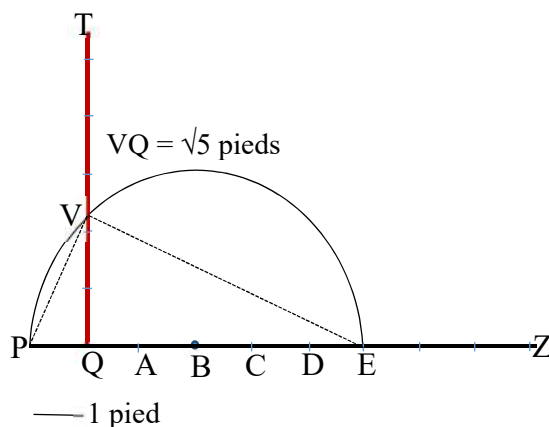


Figure 7

On décale alors le centre d'un pied en B et on considère le demi-cercle de centre B passant par P, donc de diamètre $PC = 6$ pieds. Cette fois c'est l'angle PVE qui est droit et puisque $QE = 5$ pieds, on obtient : $VQ^2 = PQ \times QE = 5$ pieds, d'où : $VQ = \sqrt{5}$ pieds (environ 0.65 m).

Théodore continue en décalant à chaque fois le centre du demi-cercle passant par P d'un pied. On obtient donc les demi-cercles de centres successifs, C, D, E, F, G, H, de diamètre respectifs 8, 10, 12, 14, 16 et 18 pieds. L'intersection de ces demi-cercles avec la perpendiculaire QT donne successivement les côtés de longueurs $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{15}$ et $\sqrt{17}$ pieds, inclus ou pas. Regardons ce qui se passe avec la dernière construction (éventuelle), celle de 17 pieds.

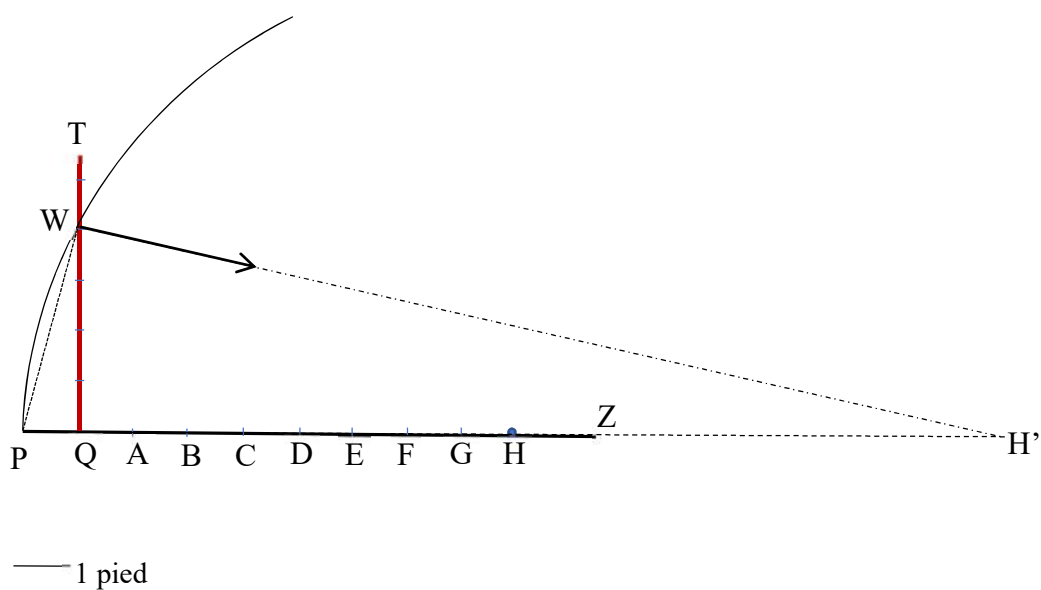


Figure 8

Le rayon $PH = 9$ pieds, le diamètre $PH' = 18$ pieds d'où $QH' = 17$ pieds. Soit W l'intersection du demi-cercle avec la perpendiculaire QT . L'angle PWH' intersectant un diamètre est droit, et d'après le corollaire, on a donc : $QW^2 = PQ \times QH'$, d'où $QW = \sqrt{17}$ pieds (environ 1.25 mètre).

On a un témoignage historique allant dans le sens de cette méthode que l'on retrouve dans ce qu'on appelle le *Commentaire Anonyme* (cf. Bastiani-Sedley donné en bibliographie).

iii) Le dessin final

On obtient alors comme dessin final :

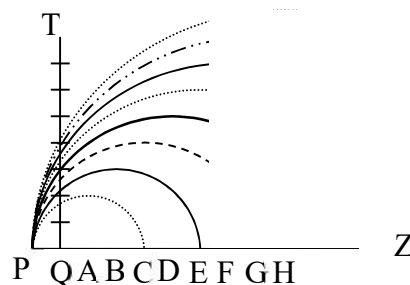


Figure 9

Conclusion. Cette construction est simple et facile à exécuter, contrairement à celle de l'*anthyphérèse*. Elle permet de tracer les diverses grandeurs incommensurables étudiées par Théodore au cas par cas, à tour de rôle ('κατὰ μίαν ἐκάστην'), sans bouger sans cesse ni tracer des perpendiculaires dans toutes sortes de directions, comme dans le cas de la spirale. Elle est donc un bon candidat pour la construction des longueurs incommensurables de Théodore. En fait, elle est compatible avec les 9 conditions imposées, et c'est la seule. Je ne vais pas le montrer ici en détails, car ces contraintes sont surtout importantes pour les preuves utilisées par Théodore pour ses démonstrations d'incommensurabilité, et d'ailleurs c'est par rapport à ces elles que Knorr a formulé les siennes. Ce sera donc dans le second exposé qu'elles seront considérées, et qu'on montrera comment et pourquoi notre reconstruction est bien la seule qui les vérifie.

J'ai considéré ici la partie graphique de la leçon de Théodore, car Théodore est présenté d'abord comme un géomètre, bien que le terme lui-même était à l'époque très général et souvent synonyme de mathématicien. Inversement, les mathématiques de Platon sont d'abord fondées sur des questions de théorie des nombres, même lorsqu'il donne des exemples géométriques comme ici ou dans le *Ménon*. On peut même aller jusqu'à dire que pour Platon, la géométrie serait une sorte de branche 'd'une arithmétique supérieure' (EEE, p. 90).

Nous en verrons un exemple dans le deuxième exposé la semaine prochaine.

Annexe I

Corollaire du corollaire théorème de Pythagore : Dans un triangle rectangle ABC , de hauteur BH , alors le carré de côté BH est égal au rectangle de côtés AH et HC (en écriture moderne $BH^2 = AH \times HC$).

Démonstration. Pour la clarté et la brièveté, on utilise ici les notations algébriques modernes, le passage dans le langage de la géométrie grecque ancienne étant aisé.

Soit ABC un triangle rectangle en B , et BH la hauteur issue de B :

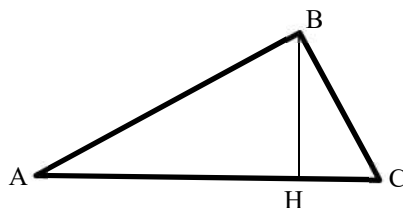


Figure 10

Il faut montrer que : $AB \times BC = BH^2$

(ou en termes plus proches de la géométrie grecque ancienne : le rectangle de côtés AB , BC est égal au carré de côté BH).

La démonstration se fait par applications successives du théorème de Pythagore aux triangles rectangles BHA , BHC et ABC :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \text{ (Pythagore pour BHA)}$$

$$BC^2 = HC^2 + BH^2 \text{ (Pythagore pour BHC)}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ (Pythagore pour ABC).}$$

Puisque : $AC^2 = (AH + HC)^2 = AH^2 + HC^2 + 2AH \times HC$ (c'est la proposition II.4 des *Éléments*) , la dernière égalité donne :

$$AH^2 + HC^2 + 2AH \times HC = AB^2 + BC^2.$$

On a donc d'après les deux premières égalités :

$$AH^2 + HB^2 + 2AH \times HC = AH^2 + HB^2 + HC^2 + BH^2, \text{ d'où :}$$

$$2AH \times HC = 2HB^2, \text{ donc : } AH \times HC = HB^2. \text{ CQFD}$$

Ce résultat est le corollaire de la proposition VI.8 des *Éléments* d'Euclide, mais la démonstration donnée ici est différente.

Annexe II : Les propriétés nécessaires pour une reconstitution acceptable des démonstrations d'incommensurabilité d'après Wilbur Knorr (EEE, p. 96-97)

'From our above examination of the Theaetetus-passage we may deduce the following set of requirements which must be satisfied by any acceptable mathematical reconstruction of Theodorus' proofs:

- (a) The proofs are demonstratively valid.
- (b) The treatment by special cases and the stopping at 17 are necessitated by the methods of proof employed.
- (c) The proofs will be understood to apply to an infinite number of cases.
- (d) No use may be made of the dichotomy or square and oblong numbers in Theodorus' studies, either in the demonstrations or in the choice of cases to be treated.
- (e) Theodorus' proofs utilize the special relations of the lines drawn in the construction of the *dynameis*. The geometrical methods of construction are of the type characteristic of metrical geometry as developed in *Elements* II and are closely associated with a certain early style of arithmetic theory.
- (f) But the arithmetic methods by which Theaetetus could prove the two general theorems, on the incommensurability of lines associated with non-square and non-cubic integers, were not available to Theodorus.

These follow from a strict reading of the passage. If a given reconstruction satisfies them, we may accept it as possible; otherwise, not. It is conceivable, of course, that any number of reconstructions will be possible in answer to a finite set of conditions. But we will find that, in fact, no reconstruction (prior to the present one) satisfies them all.'

Brève bibliographie

- Bastiani, Guido and Sedley, David, 'Commentarium in Platonis *Theaetetus*'. in *Corpus dei papyri filosofici greci e latini*, edition, translation, notes, Part III, 1995, p. 227-562
- Brisson, Luc and Ofman, Salomon, *The mathematical passage of Plato's Theaetetus (147d3-148b2) Revisited. A New Perspective*, en préparation
- Caveing, Maurice, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, 3 vol., Lille, 1994-1998
- Heath, Thomas, *History of Greek Mathematics*, 2 vol., Oxford, 1921
- Heath, Thomas, *Euclid's Elements, (The Thirteen Books)*, Cambridge, 1908
- Knorr, Wilbur, *The evolution of the Euclidean elements: a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry*, Boston, 1975
- Nails, Debra, *The people of Plato*, Indianapolis (Indiana) / Cambridge, 2002
- Ofman, Salomon, "Une nouvelle démonstration de l'irrationalité de racine carrée de 2 d'après les *Analytiques* d'Aristote", *Philosophie antique*, 10, 2010, p. 81-138
- Szabó, Arpad, *The Beginnings of Greek Mathematics*, transl. A. Umgar, Boston (Mass.), 1978