La leçon mathématique de Théodore (*Théétète*, 147c7-d6) II

Les démonstrations d'incommensurabilité de Théodore

I. Introduction

Ce deuxième exposé porte sur les méthodes utilisées par Théodore dans ses démonstrations d'incommensurabilité. Il est basé comme premier sur un travail en commun avec Luc Brisson sur le passage mathématique et son articulation au reste du *Théétète*.

Dans cet exposé, j'utiliserai les notations modernes pour simplifier les démonstrations mathématiques. Dans les annexes, vous trouverez les démonstrations écrites dans le langage des mathématiques grecques anciennes.

II. Le texte

Thééthète Et en fait, il se pourrait que tu demandes la sorte de chose qui nous est venue à l'esprit, à moi et à ce Socrate-là ton homonyme, alors que nous discutions entre nous tout à l'heure.	**Θεαίτητος** (147c7) ἀτὰρ κινδυνεύεις ἐρωτᾶν οἷον καὶ αὐτοῖς ἡμῖν ἔναγχος εἰσῆλθε διαλεγομένοις, ἐμοί τε καὶ τῷ σῷ ὁμωνύμῳ τούτῳ Σωκράτει.
Socrate Quoi donc, Théétète ?	**Σωκράτης** τὸ ποῖον δή, ὦ Θεαίτητε;
Thééthète Quelque chose à propos des puissances. Théodore ici présent nous avait trace des figures, mettant en évidence que la puissance de 3 pieds aussi bien que celle de 5 pieds ne sont pas commensurables en longueur avec celle de 1 pied ; et il a continué ainsi, prenant chacune à tour de rôle, jusqu'à celle de 17 pieds. Il s'est arrêté là pour quelque raison.	**Θεαίτητος** (147d2) περὶ δυνάμεών τι. ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο.

Comme je vous l'ai dit la semaine dernière, ce passage a donné lieu a beaucoup de reconstructions divergentes, la meilleure étant sans doute celle de Wilbur Knorr dans son ouvrage *The Evolution of Euclidean* Elements (ou *EEE*), bien que de nombreux points posent de grandes difficultés. Ce qui nous paraît important, c'est que contrairement aux autres commentateurs, il ne se contente pas de détailler la méthode qu'il juge la meilleure. Il donne six conditions que toute reconstruction de la méthode de Théodore doit vérifier pour être acceptable, ouvrant la voie théoriquement à une indéfinité de reconstructions possibles différentes et opposées à la sienne. A ces 6 conditions, nous en avons ajouté trois autres. Nous listons toutes ces neuf conditions ci-dessous.

III. Les six conditions de Knorr

Nous traduisons le texte de *EEE*.

'De notre examen ci-dessus du passage du *Théétète*, nous pouvons déduire l'ensemble des exigences suivantes que doit vérifier toute reconstruction mathématique des preuves de Théodore pour être acceptable :

1) Les preuves doivent être correctes.

2) Le traitement par cas particuliers et l'arrêt en 17 sont nécessités par les méthodes de preuve employée.

3) Les preuves doivent être comprises comme pouvant s'appliquer à un nombre infini de cas.

4) Aucune utilisation ne doit être faite de la dichotomie entre entiers carrés parfaits et entiers rectangulaires non carrés dans les études de Théodore, que ce soit dans les démonstrations ou dans les cas traités.

5) Les preuves de Théodore utilisent les relations spéciales entre les lignes tracées dans la construction des *dynameis*. Les méthodes géométriques de construction sont de type caractéristique de la géométrie métrique telle qu'elle est développée dans les *Éléments* II et sont étroitement associées avec un certain style du début de la théorie arithmétique.

6) Mais les méthodes arithmétiques par lesquelles Théétète pouvait prouver les deux théorèmes généraux concernant l'incommensurabilité des lignes associées à des entiers non-carrés et non-cubes parfais n'étaient pas disponibles à Théodore.

Ceci suit d'une lecture stricte du passage. Si une reconstruction donnée les satisfait, on peut l'accepter comme possible, sinon non. Il est concevable naturellement qu'un nombre quelconque de reconstructions soient possibles en réponse à un ensemble fini de conditions. Mais nous nous apercevrons qu'en fait, aucune reconstruction (avant la présente [du *EEE*]) ne les satisfait toutes.' (*EEE*, p. 96-97).

IV. Nos trois conditions supplémentaires

Comme je l'ai dit dans le premier exposé, non contents d'accepter le défi de ces six conditions, nous en ajoutons trois autres qui nous paraissent essentielles, et que la reconstruction de Knorr, et tout aussi bien les autres méthodes, ne vérifie pas :

1) On ne doit pas postuler *a priori* que Platon veut célébrer ici Théétète, futur grand mathématicien, et qu'il lui rend hommage. Il faut juger sur les textes.

2) Le passage doit être lu comme partie du *Théétète* et non pas comme une partie autonome.

3) La description par Platon est réaliste au sens où elle doit suivre de près les leçons réelles des mathématiciens sur le sujet, que cette leçon soit mise en scène par Platon ou ait vraiment eu lieu.

Dans l'exposé précédent, j'ai montré les graphiques tracés par Théodore, et la manière dont il les construisait. Dans celui-ci, je vais considérer sa méthode pour obtenir l'incommensurabilité de certaines grandeurs par rapport au pied-unité. Cette reconstruction vérifie ces neuf conditions.

V. Les reconstructions

De manière générale, Toutes les reconstructions commencent à la manière de la démonstration d'incommensurabilité de la diagonale par rapport au côté du carré. La méthode est une démonstration par l'absurde ou l'impossible : on suppose donc que le côté du carré est commensurable pour aboutir à une conclusion absurde ou impossible.

Deux reconstructions usuelles

Deux grands types de méthodes sont communément admises parmi les commentateurs, avec toutefois de nombreuses variantes suivant les auteurs.

1) La première méthode qui a eu longtemps les faveurs des spécialistes est très proche de celle-là même qu'on utiliserait encore aujourd'hui. Elle s'appuie sur une proposition des *Éléments* d'Euclide démontrant l'incommensurabilité de la diagonale du carré, une proposition notée X. 117. Cette proposition est considérée à juste titre comme inauthentique car elle n'est pas cohérente avec le reste du traité d'Euclide traitant de ces questions. Je vous renvoie pour les détails à mon article de 2010 donné en bibliographie.

   Mais qu'en est-il pour les démonstrations de Théodore ? Même inauthentique, ce pourrait être sa méthode de preuve. Cela se heurte à deux problèmes essentiels. Cette méthode suppose un développement de la théorie des nombres qui n'était certainement pas disponible à l'époque de Théodore. Et surtout, elle est en contradiction avec le texte car elle donne une solution générale au problème d'incommensurabilité, alors que Théétète précise que Théodore procède au cas par cas, à tour de rôle ('κατὰ μίαν ἑκάστην'). En outre, elle n'explique pas l'arrêt à *17*. En résumé, elle viole la condition 2 de Knorr.
2) La seconde méthode est celle dite par '*anthyphérèse*' ou 'soustraction alternée' déjà évoquée à l'exposé précédent. Elle a eu une grande popularité parmi les chercheurs du milieu du 20ème siècle, au point de concurrencer la précédente, et elle a encore des partisans aujourd'hui. Brièvement, c'est ce qu'on appelle en langage moderne la théorie des fractions continues. Elle s'appuie sur le début du livre X des *Éléments* d'Euclide où l'*anthyphérèse* de 2 grandeurs est définie (proposition 1) et où il est montré que si le processus de 'soustractions alternées' ne s'arrête pas, alors les 2 grandeurs sont incommensurables (proposition 2).
   Théodore l'utiliserait pour démontrer les cas d'incommensurabilité des côtés des carrés. J'ai déjà dit dans l'exposé précédent que cela est peu vraisemblable en raison de la difficulté et de la longueur des démonstrations, même si on a proposé toutes sortes de subtilités mathématiques pour la simplifier. Elle viole par ailleurs plusieurs des 9 conditions que nous avons posées (particulièrement les conditions 2, 3, 5 et surtout 9). Pour une critique détaillée portant sur les conditions 2, 3 et 5,

je vous renvoie à Knorr, *EEE* p. 118-126 ainsi qu'à son analyse sur la question des processus infinis pour les mathématiciens grecs, p. 36.

On peut alors se demander pourquoi elle a été acceptée si facilement. C'est que jusqu'à une cinquantaine d'années, il n'y avait d'autre choix que la méthode basée sur la proposition inauthentique X.117. Et pour reprendre les mots de Socrate, cette dernière est 'encore plus impossible' (192b6) que celle par '*anthyphérèse*' dont les démonstrations d'incommensurabilité sont faites effectivement au moins au cas par cas, comme l'exige le texte du *Théétète*.

VI. Notre reconstruction

1) Préliminaires

Elle s'appuie sur un résultat sur les carrés impairs dont le premier à avoir souligné l'intérêt pour les preuves d'incommensurabilité a été Jean Itard dans son ouvrage sur les livres arithmétiques d'Euclide que vous trouverez en bibliographie. Il s'agit d'un résultat très simple concernant les carrés impairs, qui apparaît facilement dès que l'on considère des tableaux de carrés, de tels tableaux remontant aux Babyloniens. C'est sans doute la raison pour laquelle Itard se contente d'en donner une preuve sous une forme algébrique moderne. Knorr la redémontre sous la forme d'un 'théorème 10' et en donne une preuve dans le style dit-il de l'arithmétique grecque ancienne. Il apparaît sous une forme ou une autre dans plusieurs textes de l'Antiquité qui nous sont parvenus, tels l'*Expositio* de Théon, l'*Arithmetica* de Diophante, *In Nichomachum* de Jamblique, mais également dans les *Platonicae Questiones* chez Plutarque. Leur analyse ainsi que les méthodes utilisées permettent à Knorr de conclure que c'était un théorème connu des Pythagoriciens anciens (*EEE*, p. 154).

2) Un résultat sur les carrés impairs

Soit alors un nombre impair. C'est un multiple de *2* augmenté d'une unité. Si on regarde la suite des premiers carrés impairs, on a :
$3^2 = 9 = 8+1$; $5^2 = 25 = 24+1$; $7^2 = 49 = 48+1$; $9^2 = 81 = 80+1$; $11^2 = 121 = 120+1$; $13^2 = 169 = 168+1$ ...,
et tous ces nombres pairs qui apparaissent alors : *8, 24, 48, 80, 120, 168* sont non seulement pairs, non seulement des multiples de *4*, mais des multiples de *8*. Cela est vrai en général, et on a (cf. Annexe II) :

Résultat des carrés impairs : *Le carré d'un impair est un multiple de 8 augmenté d'une unité.*

3) Les démonstrations d'incommensurabilité

Le raisonnement utilise les multiples de 8, c'est-à-dire :

***8* ; *16* ; *24* ; ...**

Pour les modernes, le premier multiple serait 0 qui n'est pas considéré comme un nombre dans les mathématiques grecques anciennes et n'apparaît donc pas ici.

1. Le cas du carré de *3* pieds

Nous avons vu dans l'exposé précédent comment Théodore dessinait le côté du carré. Maintenant il va montrer que ce côté est incommensurable à l'unité. Cela se fait par un raisonnement sur les entiers.

En notations modernes, on suppose donc que $\sqrt{3}$ pieds est commensurable à l'unité, donc il existe des entiers p et q tels que

$$\sqrt{3}/1 = p/q$$

d'où :

$$\sqrt{3} \times q = p \times 1 = p$$

et en prenant leurs carrés :

$$3q^2 = p^2.$$

Remarque. On ne suppose pas que p et q sont premiers entre eux comme cela est fait dans les méthodes usuelles, par contre le comptage du nombre de divisions possibles par *2* à la base de la démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale par rapport au côté du carré, permet de prendre de p et q tous deux impairs.

D'après le résultat des carrés impairs ci-dessus, q^2 est un multiple de *8* augmenté d'une unité. Donc $3q^2$ est un multiple de *8* augmenté de *3* ($3q^2 = 8k+3$). Mais p^2 est un multiple de *8* augmenté d'une unité ($p^2 = 8h+1$), donc puisqu'il est égal à $3q^2$ il est aussi un multiple de *8* augmenté de *3*. On a donc :

$$8k+3 = 8h+1,$$

d'où :

$$2 = 8h-8k.$$

Mais la différence de 2 multiples de 8 est un multiple de 8, ce qui est impossible car *2* n'est pas un multiple de *8*.

Conclusion : le côté du carré de (surface) *3* pieds est incommensurable à *1* pied.

2. Le cas du carré de *5* pieds

On procède de même et on obtient :

$\sqrt{5}/1 = p/q$ d'où $\sqrt{5} \times q = p \times 1 = p$

d'où en prenant leurs carrés :

$5q^2 = p^2$ avec p et q impairs.

De même que ci-dessus, d'après le résultat sur les carrés impairs, p^2 et q^2 sont des multiples de *8* plus une unité, et en particulier : $5q^2 = 8k+5$. On a donc :

$5q^2 = 8k+5 = p^2 = 8h+1$, d'où $8k+5 = 8h+1$, et donc :

$8k+4 = 8h$, d'où $4 = 8h-8k$.

Mais alors *4* serait la différence de 2 multiples de *8*, ce qui est impossible car *4* n'est pas un multiple de *8*.

Conclusion : le côté du carré de (surface) *5* pieds est incommensurable à *1* pied.

3. Le cas du carré de *7* pieds

De même, on obtient :

$\sqrt{7}/1 = p/q$ d'où $\sqrt{7} \times q = p \times 1 = p$

d'où en prenant leurs carrés :

$7q^2 = p^2$ avec p et q impairs.

D'où :

$7q^2 = 8k+7 = p^2 = 8h+1$, d'où $8k+7 = 8h+1$, et donc $6 = 8h-8k$,

ce qui est impossible puisque 6 n'est pas un multiple de 8.

Conclusion : le côté du carré de (surface) 7 pieds est incommensurable à 1 pied.

4. **Le cas du carré de *9* pieds**

Dans ce cas, on peut écrire :

$\sqrt{9}/1 = p/q$ d'où $\sqrt{9}\times q = p\times 1 = p$

d'où en prenant leurs carrés :

$9q^2 = p^2$ avec p et q impairs.

D'où :

$9q^2 = 8k+9 = p^2 = 8h+1$

d'où :

$8k+9 = 8h+1$, et donc $8 = 8h-8k$.

Mais cela est possible puisque 8 est un multiple de 8 !

Or 9 est un carré parfait, et le côté de longueur $\sqrt{9}$ pieds $= 3$ pieds qui est commensurable à 1 pied.

5. **Le cas du carré de *11* pieds**

De même, on obtient :

$\sqrt{11}/1 = p/q$ d'où $\sqrt{11}\times q = p\times 1 = p$

d'où en prenant leurs carrés :

$11q^2 = p^2$ avec p et q impairs.

D'où :

$11q^2 = 8k+11 = p^2 = 8h+1$,

d'où :

$8k+11 = 8h+1$,

et donc :

$10 = 8h-8k$.

Ce qui est impossible puisque 10 n'est pas un multiple de 8.

Conclusion : le côté du carré de (surface) 11 pieds est incommensurable à 1 pied.

6. **Le cas du carré de *13* pieds**

On a :

$\sqrt{13/1} = p/q$ d'où $\sqrt{13} \times q = p \times 1 = p$, et donc : $13q^2 = p^2$ avec p et q impairs.

D'où :

$13q^2 = 8k+13 = p^2 = 8h+1$, d'où $8k+12 = 8h$, et donc $12 = 8h\text{-}8k$.

Ce qui est impossible puisque *12* n'est pas un multiple de *8*.

Conclusion : le côté du carré de (surface) *13* pieds est incommensurable à *1* pied.

7. Le cas du carré de *15* pieds

On a :

$\sqrt{15/1} = p/q$ d'où $\sqrt{15} \times q = p \times 1 = p$, et donc : $15q^2 = p^2$ avec p et q impairs.

D'où :

$15q^2 = 8k+15 = p^2 = 8h+1$, d'où $8k+14 = 8h$, et donc $14 = 8h\text{-}8k$.

Ce qui est impossible puisque *14* n'est pas un multiple de *8*.

Conclusion : le côté du carré de (surface) *15* pieds est incommensurable à *1* pied.

8. Le cas du carré de *17* pieds

On a encore :

$\sqrt{17/1} = p/q$ d'où $\sqrt{17} \times q = p \times 1 = p$, et donc : $17q^2 = p^2$ avec p et q impairs.

D'où :

$17q^2 = 8k+17 = p^2 = 8h+1$, d'où $8k+16 = 8h$, et donc $16 = 8h\text{-}8k$.

Mais *16* est un multiple de *8*, et donc le côté du carré (de surface) *17* pieds pourrait être commensurable à l'unité. Mais la propriété des impairs est nécessaire mais non pas suffisante, on ne peut donc rien dire du moins par la méthode des carrés impairs, et Théodore est donc obligé de s'arrêter là.

La méthode de Théodore ne lui permet pas de dire si le côté d'un carré de surface $8k+1$ qui n'est pas un carré parfait est ou n'est pas commensurable à *1* pied. Par exemple, il ne peut résoudre la question pour les carrés de surface $8\times 2 + 1 = 17$ pieds, $8\times 4 + 1 = 33$ pieds, $8\times 5 + 1 = 41$ pieds, $8\times 7 + 1 = 57$ pieds, $8\times 8 + 1 = 65$ pieds, … Les seuls cas auxquels il peut répondre sont pour les carrés de surface 9 $(= 3\times 3)$ pieds, 25 $(= 5\times 5)$ pieds, 49 $(= 7\times 7)$ pieds, … c'est-à-dire pour les carrés parfaits.

Vérification. On va voir maintenant que cette méthode vérifie les 9 (6+3) conditions que nous avons données, et qu'il faut imposer à toute reconstruction pour être valide.

1) Les preuves doivent être correctes.
   C'est bien le cas.
2) Le traitement par cas particuliers et l'arrêt en 17 sont nécessités par les méthodes de preuve employée.
   C'est bien le cas.
3) Les preuves doivent être comprise comme pouvant s'appliquer à un nombre infini de cas.
   C'est bien le cas.

4) Aucune utilisation ne doit être faite de la dichotomie entre entiers carrés parfaits et entiers rectangulaires non carrés dans les études de Théodore, que ce soit dans les démonstrations ou dans les cas traités.
C'est bien le cas. En fait, contrairement à Knorr lui-même, le carré de surface 9 un carré parfait est dans la liste des grandeurs considérés par Théodore selon notre reconstruction.
5) Les preuves de Théodore utilisent les relations spéciales entre les lignes tracées dans la construction des *dynameis*. Les méthodes géométriques de construction sont de type caractéristique de la géométrie métrique telle qu'elle est développée dans les *Éléments* II et sont étroitement associées avec un certain style du début de la théorie arithmétique.
Là encore c'est le cas, la géométrie métrique est celle qui travaille sur les mesures et les nombres, ce qui est le cas ici. D'ailleurs Knorr utilise essentiellement la propriété des carrés impairs dans sa reconstruction.
6) Mais les méthodes arithmétiques par lesquelles Théétète pouvait prouver les deux théorèmes généraux concernant l'incommensurabilité des lignes associées à des entiers non-carrés et non-cubes parfais n'étaient pas disponibles à Théodore.
C'est bien évident, puisque la méthode ne permet de rien dire concernant une infinité de carrés de surfaces nombres entiers, à savoir tous ceux de la forme 8k+1 qui ne sont pas des carrés parfaits.
7) On ne doit pas postuler *a priori* que Platon veut célébrer Théétète, futur grand mathématicien, et qu'il lui rend hommage ici.
Absolument. Au vu de la solution donnée par la méthode de Théodore, on peut d'ailleurs mettre également en question l'admiration que Platon portait pour celui-ci qui aurait été son « maître » en géométrie.
8) Le passage doit être lu comme partie du *Théétète* et non pas comme une partie autonome.
Absolument. C'est pourquoi nous commençons avant ce qu'ont fait les auteurs qui ont travaillé sur ce passage pour l'introduire dans son contexte. Il y a bien d'autres points importants dont nous n'avons pas parlés et qui relient ce passage à la question de l'erreur, de l'opinion, de l'opinion vraie face à la science, mais aussi les différentes définitions de la science, dont les trois dernières concernant le logos.
9) La description par Platon est réaliste au sens où elle doit suivre de près les leçons réelles des mathématiciens sur le sujet, que cette leçon soit mise en scène par Platon ou ait eu vraiment lieu.
C'est pourquoi j'ai donné la totalité des cas d'incommensurabilités de la leçon de Théodore. Le point faible des autres reconstructions est qu'elles doivent considérer que Platon symbolise ici, car dans toutes les autres méthodes proposées, il est totalement irréaliste que l'on puisse montrer ces incommensurabilités dans le cadre d'une seule leçon de mathématique. Cela est valable pour la méthode longue et compliquée donnée par Knorr comme il le reconnaît d'ailleurs, ajoutant toutefois que cela n'importe pas vraiment car, dit-il, les reconstructions antérieures à la sienne sont encore pires, en quoi il a raison.

Conclusion. La méthode présentée ici utilise des résultats élémentaires et anciens fondés essentiellement sur les questions du pair et de l'impair. Théodore en suivant cette méthode a pu la donner *verbatim* sans qu'on ait à supposer que Platon fait dans le symbolisme ou la métaphore. C'est ce à quoi doivent se résoudre les autres reconstructions proposées par les nombreux commentateurs et historiens des mathématiques, y compris en fin de compte celle de Knorr. Cela est vrai, que cette leçon de Théodore à Théétète et ses jeunes camarades, ait eu lieu ou soit entièrement l'œuvre de l'imagination de Platon. C'est également la seule qui soit entièrement cohérente avec le texte platonicien. Pour terminer, je voudrais revenir sur ce qui est sans doute l'aspect principal pour Platon du passage mathématique, et en particulier de la leçon de Théodore, c'est-à-dire son intérêt philosophique.

Pour cela, je vais très brièvement considérer la dernière définition de la science par Théétète, à savoir la *doxa* vraie à laquelle s'ajoute un *logos* (201c9-d1), puis les trois définitions du *logos* (que plusieurs interprètes de Platon remplacent par '*logismos*', 'raisonnement' suivant ce que dit Socrate dans le *Ménon*), ce qui lui permet de réfuter une dernière fois Théétète (202d-210b). En dépit de cette réfutation, certains commentateurs tels Christopher Rowe qui par ailleurs a donné une très bonne traduction du *Théétète*, voient dans cette définition, celle de la science pour Platon. Nous pensons que la leçon de mathématique telle que nous l'avons considérée, entre autres choses, va directement à l'encontre de cette thèse.

Tout d'abord, cette leçon est incontestablement un discours vrai, le raisonnement est correct et le résultat est juste. Pourtant, il est peu probable que Platon s'en contenterait et le considérerait comme scientifique.

En effet, d'une part il ne donne qu'un résultat partiel, sans répondre à la question générale 'quand le côté d'un carré entier est-il commensurable à l'unité ?'. Ce résultat est obtenu via un résultat sur les carrés impairs qui n'a que peu, voire pas du tout de relation avec la question posée. En outre, la réponse étant partielle, même si on obtient ainsi une solution pour plus de 80% des cas, elle ne peut prétendre donner la cause de la commensurabilité ou de l'incommensurabilité des côtés des carrés entiers. Or dans le *Ménon* encore, Socrate exige d'un discours scientifique qu'il donne la cause de ce sur quoi il porte, qu'il le lie par un 'raisonnement sur la cause' ('αἰτίας λογισμῷ') (*Ménon*, 98a3-4). Il n'est pas même nécessaire de poser le problème délicat des deux types de discours dont l'un porterait sur les réalités intelligibles et l'autre sur les choses sensibles, établissant ainsi une séparation radicale entre *doxa* et science. La dernière définition du *Théétète* est déjà réfutée par la leçon mathématique, et cela quelle que soit la définition que l'on donne au *logos*.

Dans cette très brève analyse de conclusion j'ai voulu présenter de manière très partielle l'aspect central que tient selon nous le passage mathématique, non pas seulement du point de vue de l'histoire des mathématiques pré-euclidiennes, mais pour l'interprétation philosophique du *Théétète* et de son enquête sur une définition de la science, mais aussi de la *doxa*, du raisonnement (*logismos*) et du discours (*logos*).

Annexe I

‘the following general features of the mathematics Plato introduces. First, the examples cited are most usually drawn from the theory of number, and many of the geometric examples are in fact very closely associated with arithmetic studies. Indeed, Plato sometimes even speaks as if the fields of geometry and stereometry were branches of higher arithmetic. But this would be an exaggeration. What we see, rather, is that Plato’s instances of geometry always fall into the pattern of metrical geometry, and in particular, of a metrical geometry directed tow. and the elucidation of the properties of integers. The overwhelming majority of mathematical examples in Plato's works are arithmetical. His favorite example is that of the odd and even. Among other arithmetical examples are the ‘nuptial number’ and the ‘rational and irrational diameters’ *(Republic* 546C) and the ‘tyrant’s number’ *(Republic* 587E). Even when Plato introduces materials we would properly designate as geometric, the arithmetic intent is present. At *Meno* 82-85, for instance, the subject of discussion is a geometric theorem: that the double-square is constructed as the square on the diagonal of the given square. But the assignment of the ‘foot’ as unit establishes an affinity with the tradition of metrics and the mathematics of the passage is executed entirely within the field of arithmetic: only the operations of counting and of multiplication are employed in the analysis. When we consider the practice of representing numbers by geometric figures (the number two, for instance, may be figured as a rectangle of sides one and two units), we may view the Meno-passage as an investigation of the nature of such representations: how can the number eight be constructed as a square? We see the relevance of the concept of *dynamis* here, made explicit at *Statesman* 266A, and of course developed fully at *Theaetetus* 147D.’ La terminologie de Théodore est métrique. Il utilise l’unité concrète du pied plutôt que les unités abstraites tel que le fait Euclide. (*EEE*, p. 90).

Annexe II

Démonstration du résultat sur les carrés impairs. *Tout carré impair est un multiple de 8 augmenté d'une unité.*

Démonstration 1 (algébrique moderne). On va tout d'abord donner une démonstration en utilisant le symbolisme moderne :

$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+ 4k + 1 = 4(k^2+ k) + 1 = 4k(k + 1) + 1.$

Comme ou bien k ou bien $k+1$ est pair, m^2 est un multiple de 8 augmenté de 1. En écriture en mathématiques grecques anciennes, on aurait : le carré construit (= de côté) m est égal à celui construit sur $2k+1$, donc (*Éléments*, ???).

Nous allons également donner plusieurs démonstrations plus en ligne avec la mathématique grecque ancienne.

Démonstration 2 (arithmétique grecque ancienne). Cela est fait via un résultat sur les entiers pairs.

Tout d'abord on a :

i) On montre tout d'abord que : *tout entier pair est ou bien lui-même ou bien si on lui ajoute 2 mesuré par 4.*
Soit A un tel entier et B ce nombre ajouté de 2. Si 4 mesure A, le résultat est vrai. Soit donc 4 ne mesurant pas 4, c'est-à-dire il est impairement pair. Alors A est deux fois un impair C, donc la somme d'un pair D et de l'unité. Donc A est 2 fois D plus 2, et B est 2 fois D plus 4. Mais D est pair donc 4 mesure $2D$, donc il mesure B. [1]

ii) Soit alors A entier impair. C'est donc un pair plus une unité. Soit B cet entier pair. Le carré de A est égal à une unité augmentée du carré de B plus 2 fois B. Soit C ce nombre, il est égal au produit de B par B augmenté de 2. D'après le résultat précédent, ou bien 4 mesure B et donc il mesure le carré de B et C, ou bien il mesure 2 ajouté à B. Soit D ce nombre. Mais C est le produit de B par D donc puisque B est pair, il est mesuré par 8. [2] CQFD

Démonstration 3 (Knorr, *EEE*, p. 153)

Il est donné sous la forme d'un théorème :

Théorème 10. *Tout nombre impair carré diminué d'une unité est 8 fois le multiple d'un nombre triangulaire*.

Knorr montre tout d'abord un autre théorème (*EEE*, p. :

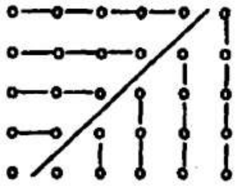
Théorème 6 : *Tout nombre 'oblong' [*'ἑτερομήκης', *i.e. le produit de 2 entiers consécutifs] est le double d'un nombre triangulaire.*

---

[1] Algébriquement, $B = A + 2 = 2\ C + 2 = 2\ (D+1) + 2 = 2D + 4$ avec D entier pair.

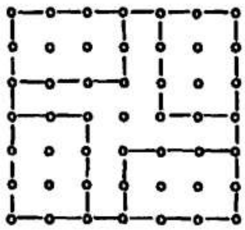
[2] Algébriquement, $A = B + 1$ and $(B + 1)^2 = B(B + 2) + 1$. Puisque B est pair, ou bien B ou $B+2$ est un multiple de 4 (premier résultat), donc un multiple de 8.

Démonstration du théorème 6. Cela résulte immédiatement de la figure ci-dessous :



Cela peut être démontré en appliquant le Théorème 6 à la figure suivante :

Le théorème 10 résulte alors de l'application du théorème 6 à la figure suivante :



En effet, chaque portion 'oblongue' du carré impair dessiné dans cette figure peut être divisé en 2 nombres triangulaires égaux. Ainsi le grand carré, moins une unité, est égal à 8 nombres triangulaires égaux, comme l'affirme le théorème 10.

Démonstration 4

Analogue à la précédente mais plus brève car évident sur la figure :

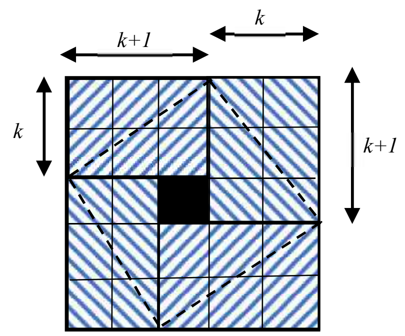


Figure 1

Le carré de côté $2k+1 = k + (k+1)$ est somme d'une unité (le carré en noir) et de 4 rectangles de côtés $(k,k+1)$. Le produit de 2 nombres consécutifs étant pair (appelé parfois '*hétéromèque*'), la surface du carré est égale à une unité plus un multiple de 8. CQFD

Bibliographie

Bastiani, Guido and Sedley, David, 'Commentarium in Platonis *Theaetetum*'. in *Corpus dei papyri filosofici greci e latini*, edition, translation, notes, Part III, 1995, p. 227-562

Brisson, Luc and Ofman, Salomon, *The mathematical passage of Plato's* Theaetetus *(147d3-148b2) Revisited. A New Perspective*, en préparation

Caveing, Maurice, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, 3 vol., Lille, 1994-1998

Heath, Thomas, *History of Greek Mathematics*, 2 vol., Oxford, 1921

Heath, Thomas, *Euclid's* Elements, (*The Thirteen Books*), Cambridge, 1908

Knorr, Wilbur, *The evolution of the Euclidean elements: a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry*, Boston, 1975

Ofman, Salomon, "Une nouvelle démonstration de l'irrationalité de racine carrée de 2 d'après les *Analytiques* d'Aristote", *Philosophie antique*, 10, 2010, p. 81-138