Conduction thermique (n°2) –
Équation de diffusion de la chaleur

Nous avons, dans la $1^{ère}$ vidéo de la collection « La physique animée » consacrée aux transferts thermiques conductifs, présenté les paramètres clefs de ce mode de transfert thermique, tels que la conductivité thermique et la capacité thermique massique.

Nous allons, dans cette nouvelle vidéo, démontrer l'équation fondamentale qui régit ces phénomènes, appelée équation de la diffusion thermique.

Nous donnerons, entre autres, l'interprétation physique de la diffusivité thermique, paramètre qui intervient dans cette équation fondamentale, en montrant qu'elle permet de déterminer la vitesse avec laquelle l'énergie thermique se propage au sein d'un corps.

--

Pour démontrer l'équation de la diffusion thermique, nous utilisons le premier principe de la thermodynamique.
Reprenons l'exemple, vu dans la précédente vidéo, de la barre métallique placée entre deux thermostats et demandons-nous comment va varier sa température en fonction de la seule variable d'espace x et du temps.

Considérons un volume élémentaire *Sdx* de la barre, situé entre les abscisses x et x + dx, et effectuons un bilan d'énergie.

Notons c_m la capacité thermique massique de la barre, l sa conductivité thermique et r sa masse volumique, grandeurs prises constantes et notamment indépendantes de la température.

L'énergie interne de ce volume élémentaire vaut, à l'instant t :

$$U(x,t) = \rho S dx\, c_m\, T(x,t)$$

Sa variation pendant la durée dt est :

$$dU = \rho S dx\, c_m \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dt$$

Le 1^{er} principe de la thermodynamique, appliqué à ce volume en l'absence de travail des forces de pression, permet d'écrire que cette variation d'énergie interne est égale au transfert thermique total reçu, lui-même relié à la différence des flux thermiques entrant à l'abscisse x et sortant à l'abscisse x + dx pendant la durée dt :

$$\rho S dx\, c_m \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dt = \Phi_{th}(x,t)dt - \Phi_{th}(x+dx,t)dt$$

En reconnaissant la différentielle du flux thermique :

$$\rho S c_m \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_{th}(x,t)}{\partial x}$$

Et, en appliquant la loi de Fourier :

$$\rho S c_m \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} S\right)$$

On obtient finalement l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_m} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

Définissons la diffusivité thermique D de la barre :

$$D = \frac{\lambda}{\rho c_m}$$

L'équation de la diffusion thermique s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

On remarque que les variables d'espace x et du temps t, ne jouent pas des rôles symétriques : l'équation de la diffusion thermique n'est pas invariante si l'on renverse le temps (en échangeant t en – t) : la conduction thermique est bien un phénomène irréversible associé à un transfert d'énergie spontané d'un corps chaud vers un corps froid. C'est d'ailleurs ce que dit l'énoncé de Clausius du 2nd principe de la thermodynamique : « Aucun processus n'est possible si son résultat unique est le transfert d'une quantité d'énergie thermique d'un corps à basse température vers un corps dont la température est plus élevée ».

Cette équation a été obtenue en supposant qu'il n'y avait pas de sources internes d'énergie thermique au sein de la barre.

Dans le cas de matériaux radioactifs dont la désintégration est source de dégagement de chaleur interne ou de conducteurs ohmiques soumis à l'effet Joule, l'équation de la diffusion thermique se réécrit avec un terme supplémentaire, p_v, qui représente la puissance thermique volumique dégagée par ces sources.

La diffusivité dépend de la capacité du matériau à conduire la chaleur : elle est d'autant plus grande que la conductivité thermique est forte.

Elle dépend également de la capacité du matériau à accumuler de l'énergie thermique : elle est d'autant plus grande que sa capacité thermique est faible.

Les diffusivités thermiques sont exprimées en $m^2.s^{-1}$ dans le Système international d'unité.

Donnons en quelques valeurs : par exemple, $0{,}5.10^{-6}$ pour le verre, $0{,}58.10^{-6}$ pour la laine minérale, 15.10^{-6} pour l'acier, 20.10^{-6} pour l'air sec et 117.10^{-6} pour le cuivre.

On remarque que des matériaux aussi différents que l'air et l'acier ont pratiquement les mêmes diffusivités thermiques alors que leur masse volumique et conductivité thermique sont très différentes.

Au laboratoire, nous pouvons mettre en évidence la différence de temps de propagation de la chaleur au sein de différents matériaux.

Nous utilisons un conductiscope composé de 4 métaux : du fer, du laiton (qui est un alliage composé de cuivre et de zinc), de l'aluminium et du cuivre. Les tiges sont de même dimension et sont recouvertes de cristaux thermosensibles, qui permettent de donner localement une image de la température.

À température ambiante, ici 19°C, les éléments sont noirs.

On plonge les métaux dans un bain d'eau chaude, et l'on observe l'évolution de la température le long des tiges.

La diffusion de l'énergie thermique est la plus rapide dans le cuivre et la plus lente dans le fer.

L'expérience peut aussi être réalisée avec du matériel beaucoup plus simple.

Ici nous collons un trombone à la cire au bout de chaque tige de métal.

Nous chauffons une extrémité des tiges avec une bougie et lorsque la température à l'autre extrémité des tiges devient supérieure à la température de fusion de la cire, le trombone tombe.

Comme nous l'avons vu dans la première expérience, la diffusion thermique est la plus rapide dans le cuivre, puis dans l'aluminium, dans le laiton et finalement beaucoup plus lente dans le fer.

Maintenant prenons un seul matériau, ici une tige d'aluminium sur laquelle nous avons collé à la cire des trombones tous les 3 centimètres. On observe que si les premiers tombent relativement rapidement, plus on s'éloigne du point de chauffe, plus les durées entre les chutes des trombones s'allongent. Le transfert thermique n'a pas lieu à vitesse constante.

Ici, la barre n'étant pas isolée et la quantité de cire n'étant pas exactement la même sous chaque trombone, nous n'exploiterons pas de manière quantitative cette expérience.

Proposons maintenant une application de propagation de l'énergie thermique dans le domaine du bâtiment.

Pour cela et très concrètement, intéressons-nous aux variations diurnes, c'est-à-dire sur une journée, de la température de l'air imposée à la surface d'un mur d'une maison.

Et modélisons ces variations par l'évolution sinusoïdale :

$$T_{air}(t) = T_{moy} + T_0 \cos(2\pi \frac{t}{\tau})$$

Où T_{moy} est la température moyenne journalière (par exemple 20°C en été), T_0 l'amplitude des variations de la température (10°C par exemple, toujours en été) et *tau* la période de rotation de la Terre autour d'elle-même, égale à une journée.

La température maximale extérieure, soit 30°C dans notre exemple, est atteinte à 14 h.

Quelle sera la valeur de la température maximale dans la maison et à quelle heure sera-t-elle obtenue ?

L'évolution de la température dans la maison peut être décrite sous la forme de la propagation d'une onde thermique certainement amortie, de longueur d'onde *l* et de période une journée.

Mais alors, combien de temps met cette onde pour pénétrer dans la maison ?

Partons de l'équation de la diffusion thermique en l'absence de source thermique :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

Et évaluons, « en ordre de grandeur », les deux dérivées partielles qui apparaissent, sur une durée égale à la période *tau* et une distance égale à la longueur d'onde *l*.

Comme T_0 représente l'ordre de grandeur de la variation de température :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \approx \frac{T_0}{\tau} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{T_0}{\lambda^2}$$

L'équation de la diffusion donne alors, en ordre de grandeur :

$$\frac{T_0}{\tau} \approx D\,\frac{T_0}{\lambda^2} \quad \text{soit} \quad \lambda \approx \sqrt{D\tau}$$

Si *e* désigne l'épaisseur du mur de la maison, la durée de parcours de l'onde de température est alors :

$$\Delta t \approx \frac{e}{\lambda}\tau \approx e\sqrt{\frac{\tau}{D}}$$

Cette durée, encore appelée déphasage thermique (et souvent exprimée en heures), correspond à l'ordre de grandeur du temps mis par l'onde de température pour rentrer à l'intérieur de la maison.

Ce déphasage thermique, proportionnel à l'épaisseur et inversement proportionnel à la racine de la diffusivité de la paroi, caractérise la capacité d'un matériau à retarder les variations extérieures de la température.

La vitesse v de propagation de l'onde de température au sein du corps, définie par :

$$v = \frac{e}{\Delta t} \approx \sqrt{\frac{D}{\tau}} \propto \sqrt{D}$$

Cette vitesse est d'autant plus grande que la diffusivité du matériau est élevée : on peut ainsi dire finalement que la diffusivité d'un matériau quantifie la vitesse à laquelle l'onde de température se propage par conduction dans un corps.

Dans l'exemple proposé, c'est à 14 h que la température est la plus élevée à l'extérieur mais ce n'est que 5 h plus tard que le pic de température sera atteint à l'intérieur du logement.

Des matériaux, comme le polystyrène extrudé ou expansé, la laine de roche ou de verre, possédant des déphasages thermique de plusieurs heures, permettront de conserver naturellement une température acceptable en journée dans la maison. Les maximas de température seront atteints en soirée au moment où une simple aération naturelle pourra suffire à diminuer la température du logement.

Pour les habitants de zones plus chaudes, un isolant d'au moins 10 heures de déphasage sera préférable, comme les panneaux de bois, de liège ou encore l'ouate de cellulose.