Conduction thermique (n°3) –

Temps caractéristique, résistance thermique et température de contact

Nous avons introduit les paramètres essentiels intervenant lors des transferts thermiques par conduction dans les deux vidéos précédentes de la collection « La physique animée ». Nous avons également présenté l'équation de la diffusion thermique qui régit ces phénomènes et en avons donné deux exemples de résolution.

Dans cette nouvelle vidéo, la dernière consacrée aux transferts thermiques par conduction, nous montrerons pourquoi ces transferts sont des phénomènes lents à l'échelle microscopique et en présenterons une application dans le cadre de la physique thermique du bâtiment.

Pourquoi la conduction thermique est-elle un phénomène lent ?

Notons L une dimension caractéristique du système étudié, c'est par exemple la longueur de la barre que l'on avait étudiée dans les deux dernières vidéos.

D'autre part, nous appellerons τ le temps caractéristique de diffusion thermique, c'est-à-dire le temps pour lequel la température dans la barre devient stationnaire, donc indépendante du temps.

Notons ΔT la variation caractéristique de la température à l'échelle du système : c'est, dans l'exemple de la barre, la différence des températures des deux thermostats.

L'équation de la diffusion thermique donne, en ordre de grandeurs :

$$\frac{\Delta T}{\tau} \approx D \frac{\Delta T}{L^2}$$

D'où la relation entre la longueur caractéristique du phénomène et sa durée :

$$L^2 \approx D\tau$$

Pour des épaisseurs de l'ordre du cm et sachant que la diffusivité thermique est de l'ordre du $mm^2 .s^{-1}$ pour de nombreux systèmes, les temps caractéristiques sont de l'ordre de grandeur de la minute.

$$\tau \approx \frac{L^2}{D} \approx \frac{(10^{-2})^2}{10^{-6}} \approx 100\ s \approx 1 \text{ min } 40\ s$$

Les transferts thermiques purement conductifs sont par conséquent des phénomènes lents. On pourra ainsi souvent considérer une évolution rapide comme adiabatique, c'est-à-dire s'effectuant sans échange de chaleur.

On peut également donner une autre interprétation de la longueur caractéristique L.

En effet, en écrivant que :

$$L \approx \sqrt{D\tau}$$

On peut alors interpréter L comme étant la distance atteinte par diffusion à l'instant τ.

Imaginons par exemple, sur une règle métallique, une zone très petite centrée à l'origine et portée à haute température à l'instant t_0 pris comme origine des temps.

La température varie en fonction du temps et de la position x sur la règle.

Et la largeur de la zone de diffusion thermique apparaît bien comme étant proportionnelle à la racine carrée du temps qui s'écoule.

Nous pouvons retrouver cette dépendance à l'aide d'une résolution numérique de l'équation de diffusion. Nous travaillons en une seule dimension de l'espace et nous utiliserons le langage python.

Nous proposons, pour cet exemple, un code volontairement simple basé sur la méthode des différences finies.

À chaque instant nous avons un profil de température discrétisé pour tous les points de l'espace, x, x+dx, etc. Nous utilisons des unités arbitraires (u.a.).

À partir du profil de température à l'instant t, nous allons calculer les valeurs de température à l'instant t+dt pour tous les points de l'espace.

Pour l'écriture de l'algorithme, on utilisera T(j, n) l'approximation numérique de T(x_j, t_n), avec l'indice j correspondant à l'espace et l'indice n au temps.
En chaque point de l'espace les valeurs de la température seront calculées successivement à partir de la connaissance des valeurs à l'instant précédent.

Pour calculer la température T en j, à l'instant n+1, nous aurons besoin des valeurs de la température en j-1, j et j+1 de l'instant n.

La discrétisation de l'équation de diffusion s'écrit en s'inspirant d'un développement de Taylor :

$$\frac{T_{(j,n+1)} - T_{(j,n)}}{dt} = D\,\frac{T_{(j+1,n)} - 2T_{(j,n)} + T_{(j-1,n)}}{(dx)^2}$$

Le lien en description de cette vidéo, sur le site CultureSciences Physique, vous permettra de retrouver des détails, dans lesquels nous n'entrerons pas ici, de l'explication de la discrétisation de l'équation de diffusion et du choix des paramètres numériques.

Commençons par imposer une condition initiale du système en une dimension étudié : on vient porter à haute température une petite zone au centre de l'objet. C'est comme si l'objet était chauffé à une température de 1 (en unités arbitraires) à t = 0. Les conditions de température aux bords (en x=-400 et 400) restent fixes et égales à 0 sur toute la durée de la simulation.

On calcule ensuite pour chaque pas de temps toutes les valeurs de température sur toute la longueur du système étudié.

On peut tracer le profil de température à différents temps, la palette de couleurs correspond au violet pour les temps les plus courts pour aller jusqu'au jaune pour les temps les plus longs.

On s'intéresse maintenant à l'évolution de la largeur du front de diffusion.

On calcule la largeur à mi-hauteur de la tache de diffusion au cours du temps.

Afin de vérifier que le front de température suit bien une loi proportionnelle à la racine du temps, on peut superposer le résultat de la résolution numérique avec une fonction variant en racine carrée du temps en représentation log-log.

Nous retrouvons bien, pour les temps longs, que la largeur de la zone de diffusion augmente selon la racine carrée du temps.

Nous allons poursuivre notre tour d'horizon des phénomènes liés aux transferts thermiques par conduction en évoquant l'application des lois, propres à ces transferts thermiques, à la physique des bâtiments.

La résistance thermique d'un matériau est une grandeur caractéristique qui représente son aptitude à diminuer les transferts thermiques en son sein. C'est une grandeur très utile en physique des bâtiments, quand on cherche à isoler correctement des maisons ou des immeubles.

Pour définir la résistance thermique, commençons à déterminer en régime indépendant du temps, la température dans un mur de brique homogène de section S, d'épaisseur L et dont les extrémités sont maintenues aux températures T_{int} et T_{ext} que l'on supposera inférieur à T_{int}.

On suppose que le transfert thermique ne s'effectue que dans une seule direction (Ox).

En régime indépendant du temps, l'équation de la diffusion thermique se réduit à :

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = 0$$

La température évolue ainsi de manière affine avec l'abscisse x.

Par conséquent, le flux thermique qui traverse une section S du mur et donné par la loi de Fourier, vaut :

$$\Phi_{th} = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} S = -\lambda \frac{T_{ext} - T_{\text{int}}}{L} S$$

Soit :

$$\Phi_{th} = \lambda \frac{T_{\text{int}} - T_{ext}}{L} S$$

En électricité, on définit la résistance électrique en utilisant la loi d'Ohm :

$$U = RI$$

Par analogie, on définit la résistance thermique du mur en écrivant que :

$$\Delta T = R_{th} \Phi_{th}$$

Avec :

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}$$

Comme on peut s'y attendre physiquement, on remarque bien que la résistance thermique est d'autant plus faible que la conductivité thermique est grande, la surface importante et la paroi fine.

On définit de même, par analogie, sa conductance thermique égale à :

$$G_{th} = 1 / R_{th} \, .$$

Donnons quelques exemples, utiles dans le bâtiment quand on s'intéresse à l'isolation des murs d'une maison.

Un mur en béton est recouvert d'un matériau isolant. Le béton et l'isolant sont traversés parle même flux thermique. Leurs résistances thermiques, en série, s'ajoutent pour donner la résistance équivalente du mur isolé :

$$R_{tot} = R_{béton} + R_{isolant}$$

Donnons quelques ordres de grandeurs dans le cas du double vitrage associant une vitre en verre de surface S, d'épaisseur e / 3 et de conductivité l, une même épaisseur d'air de conductivité l_{air} et une deuxième vitre identique à la première.

La résistance thermique du double vitrage est égale à deux fois la résistance thermique du verre plus la résistance thermique de l'air.

Pour une épaisseur d'un centimètre, une section d'un mètre carré, on trouve que la résistance thermique du double vitrage vaut 0,175 KW^{-1}.
Pour un simple vitrage de même épaisseur e, la résistance thermique vaut $1{,}25.10^{-2}$ KW^{-1}.
Soit une valeur 15 fois plus faible que celle du double vitrage, ce qui justifie bien l'intérêt de celui-ci.

Considérons maintenant deux résistances placées en parallèle, comme celles, par exemple, du mur et de la fenêtre et notons R_m la résistance thermique du mur et R_f celle de la fenêtre.

La résistance thermique de l'ensemble vérifie alors, par analogie avec la loi d'association de deux résistances électriques en parallèle, la relation :

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_f}$$

Et le flux thermique total à travers l'ensemble est :

$$\phi_{tot} = \frac{T_{\text{int}} - T_{ext}}{R_{tot}}$$

Si la fenêtre est mal isolée, alors :

$$R_f << R_m \quad par\ conséquent\ R_{tot} \approx R_f$$

Le flux thermique devient alors :

$$\phi_{tot} \approx \frac{T_{\text{int}} - T_{ext}}{R_f} = \phi_f$$

La fenêtre constitue ce que l'on appelle, couramment en physique du bâtiment, un pont thermique à travers lequel se fera l'essentiel des pertes.
Voici un autre exemple où l'on voit que l'isolation thermique intérieure des murs d'une maison n'a pas pu être posée là où se trouvait un mur porteur intérieur. Une grande partie des transferts thermiques s'effectue alors à travers le mur porteur au contact direct avec l'extérieur : on est bien en présence d'un pont thermique !

Et finalement, après 3 vidéos consacrées aux transferts thermiques par conduction, si l'on se posait la question suivante : pourquoi, lorsque l'on marche pieds nus dans une maison, le carrelage de la cuisine paraît-il plus froid que le parquet du salon alors qu'ils sont, tous les deux, à la même température ambiante ?

La température de surface du pied est de l'ordre de 36°C et celles du carrelage et du bois sont identiques, de l'ordre de 20°C. Le carrelage et le bois devraient nous paraître froids de la même manière !

Regardons un peu plus en détails le cheminement des transferts thermiques …

Dans un premier temps, la surface du matériau, que ce soit le carrelage ou le bois, va se réchauffer au contact du pied. La variation de température de sa surface est d'autant plus faible que sa capacité thermique volumique ρc_m est élevée, *r* étant sa masse volumique et c_m sa capacité thermique massique.

Un transfert thermique, dans un deuxième temps, s'effectue entre la surface et l'intérieur du matériau, d'autant plus rapide que la vitesse v de l'onde thermique, proportionnelle à la racine carrée de la diffusivité D, est grande.

$$v \propto \sqrt{D} = \sqrt{\lambda / \rho c_m}$$

On définit alors l'effusivité E égale au produit de ρc_m par la racine carrée de la diffusivité *:*

$$E = (\rho c_m)\sqrt{D} = \sqrt{\lambda \rho c_m}$$

Si le matériau a une effusivité élevée, il élimine rapidement l'énergie thermique qu'il reçoit, sans se réchauffer notablement en surface : c'est le cas du carrelage.

C'est le contraire pour un matériau à faible effusivité qui va diffuser plus lentement l'énergie thermique et se réchauffer notablement en surface : c'est le cas du bois.

On peut montrer que la température de contact entre le pied et le matériau, atteinte très rapidement, est donnée par la relation, dans laquelle les températures doivent être exprimées en Kelvin :

$$T_s = \frac{E_p T_p + E_m T_m}{E_p + E_m}$$

Où *Tp* et *Tm* sont les températures initiales du pied et du carrelage ou du bois, soient *36°C* et *20°C* et E_p et E_m les effusivités du pied et du matériau, soient (exprimées dans le système international d'unités) 1 800 pour le pied, 2 000 pour le carrelage et 400 pour le bois.

Le carrelage semblera bien plus froid que le bois puisque la température de contact, donnée par cette relation, est de *28°C* alors qu'elle est supérieure dans le cas du bois et égale à *34°C*.

Avec une plaque d'acier dont la diffusivité est de *14 000* dans le système international, soit *35* fois celle du bois, la température de surface aurait été encore plus faible, de l'ordre de *22°C*.

Les prochaines vidéos de la collection « La physique animée » consacrées aux transferts d'énergie présenteront les autres formes de transferts thermiques, par convection et par rayonnement.